HAMILTON-FORMULIERUNG UND BEWEGUNGS= GLEICHUNGEN

GENERALISIERTER IMPULS: $\Pi = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}}$, $\dot{\psi} = \partial_t \psi$

$$\underline{H = \Pi\, \partial_t \psi - \mathcal{L}}$$

HAMILTO DICHTE.

BETRACHTEN TOTALES DIFFERENTIAL:

$$dH = \partial_t \psi\, d\Pi + \Pi\, d(\partial_t \psi) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} d\psi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{|\mu}} d\psi_{|\mu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\mu}\Big|_{ex} dx_\mu$$

NUN GILT: $\dfrac{\partial H}{\partial \Pi} = \partial_t \psi$ $\quad \dfrac{\partial H}{\partial x_\mu}\Big|_{ex} = -\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{|\mu}}\Big|_{ex}$

$\dfrac{\partial H}{\partial \psi} = -\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi}$ $\quad \dfrac{\partial H}{\partial \psi_{|\mu}} = -\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{|\mu}}$

DIE LAGRANGE BEWEGUNGSGL. ERGIBT:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{|\mu}}\right) = \partial_a \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{|a}}\right) + \partial_t \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}}\right) \quad , \; a = 1 \ldots 3, \; \mu = 1 \ldots 4$$

$$= \partial_a \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{|a}}\right) + \partial_t \Pi$$

HAMILTON GLEICHUNGEN:

$$\partial_t \psi = \frac{\partial H}{\partial \Pi} \quad , \quad \partial_t \Pi = -\left[\frac{\partial H}{\partial \psi} - \left(\frac{\partial H}{\partial \psi_{|a}}\right)_{|a}\right]$$

EINFÜHRUNG: FUNKTIONALBLEITUNG:

δ.

SEI: $F = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \; f(\psi, \psi_{|\mu}, \Pi, x_\mu)$

$$\frac{\delta F}{\delta \psi} \underset{\text{Def}}{=} \frac{\partial f}{\partial \psi} - \left(\frac{\partial f}{\partial \psi_{|a}}\right)_{|a} \; ; \; \frac{\delta F}{\delta \Pi} = \frac{\partial f}{\partial \Pi}$$

BETRACHTEN BEISPIEL: $F := \mathbb{H} .= \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \; H$

$$\partial_t \psi = \frac{\delta \mathbb{H}}{\delta \Pi} \; , \; \frac{\partial \Pi}{\partial t} = - \frac{\delta \mathbb{H}}{\delta \psi}$$

NÄCHSTER SCHRITT: POISSON-KLAMMERN: DIE VORFORM QM-KOMMUTATOREN

$$[F, G] = \int d^3x \left(\frac{\delta F}{\delta \psi} \frac{\delta G}{\delta \Pi} - \frac{\delta G}{\delta \psi} \frac{\delta F}{\delta \Pi} \right)$$

SEI: $G := \mathbb{H}$ $\rightarrow$ EINSETZEN

$$[F, \mathbb{H}] = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left[\left[\frac{\partial f}{\partial \psi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial f}{\partial \psi_{|\mu}} \right) \right] \dot{\psi} + \frac{\partial f}{\partial \Pi} \frac{\partial \Pi}{\partial t} \right]$$

AUSMULTIPLIZIEREN, PRODUKTREGEL

BEACHTE: $\int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{\partial f}{\partial \psi_{|\mu}} \dot{\psi} \right)_{|\mu} d^3x = 0$ GAUSS-SATZ: TOTALE DIVERGENZ.

$$\searrow$$

$$[F, \mathbb{H}] = \int d^3x \left[\frac{\partial f}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \psi_{|\mu}} \frac{\partial \psi_{|\mu}}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \Pi} \frac{\partial \Pi}{\partial t} \right]$$

NUN GILT AUCH:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \psi_{|\mu}} \frac{\partial \psi_{|\mu}}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \Pi} \frac{\partial \Pi}{\partial t} + \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{ex}.$$

$$\searrow$$

$$[F, \mathbb{H}] = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left[\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial t}\Big|_{ex} \right]$$

$$\searrow$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t}\Big|_{ex} + [F, \mathbb{H}]$$

HAMILTON'S BEWEGUNGS GL. FÜR F.

<u>QUANTENMECHANIK:</u>

$\mathbb{H} \rightarrow \underset{\bullet}{H}$ HAMILTON-OPERATOR

$F \rightarrow \underset{\bullet}{F}$ OBSERVABLE F

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \underset{\bullet}{F} = \frac{\partial}{\partial t} \underset{\bullet}{F}\Big|_{ex} + [\underset{\bullet}{F}, \underset{\bullet}{H}]}$$

HIER IST: $[\underset{\bullet}{F}, \underset{\bullet}{H}] = \underset{\bullet}{F}\underset{\bullet}{H} - \underset{\bullet}{H}\underset{\bullet}{F}$

$\Longrightarrow$ HEISENBERGSCHE BEWEGUNGSGLEICHUNG.

DAS SCHRÖDINGER FELD:

$$\mathcal{L} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Big[\vec{\nabla}\psi^* \cdot \vec{\nabla}\psi + \frac{im}{\hbar}\left[(\partial_t\psi^*)\psi - \psi^*(\partial_t\psi)\right] + \frac{2m}{\hbar^2}V(\vec{r},t)\,\psi^*\psi\Big]$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^*.$$

$\vec{\nabla}$ – NABLA OPERATOR.

$\vec{\nabla} := \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ – VEKTOR.

$\vec{\nabla}\psi = \text{grad}\,\psi$; $\partial_t\psi \equiv \frac{\partial}{\partial t}\psi$.

$\psi(\vec{r},t)$ – SCHRÖDINGER FELD : SCHRÖDINGERS PSI-FUNKTION.

$\psi = a + ib$, $\psi^* = a - ib$. , $i = \sqrt{-1}$.

BEWEGUNGSGLEICHUNG:

FÜR : ψ ODER ψ^*

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_{,\mu}}\right) = 0.$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^*} = \left[-\frac{im}{\hbar}\partial_t\psi + \frac{2m}{\hbar^2}V(r,t)\psi\right]\cdot\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\right)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{\nabla}\psi^*} = -\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}\psi$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\psi^*)} = \frac{im}{\hbar}\psi\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\right)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*_{|\mu}}\right)_{|\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} - \vec{\nabla}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{\nabla}\psi^*}\right) - \partial_t\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_t \psi^*}\right) = 0 .$$

$$-\frac{im}{\hbar}\partial_t\psi + \frac{2m}{\hbar^2}V(r,t)\psi - \left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)^{\circ}\vec{\nabla}^2\psi - \frac{im}{\hbar}\partial_t\psi = 0$$

$$\vec{\nabla}^2 \equiv \Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$ LAPLACE-OPERATOR.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{2im}{\hbar}\partial_t\psi = \frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi - V(r,t)\psi$$

$$\boxed{\frac{\hbar}{i}\partial_t\psi = \underset{\uparrow\,\text{KIN}}{\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi} - \underset{\uparrow\,\text{POT.}}{V(\vec{r},t)\psi}}$$

SCHRÖDINGER GLEICHUNG.

$\longrightarrow$ PARABOL. DIFFERENTIAL GLEICHUNG

$\Longrightarrow$ KEINE "MATERIEWELLEN" GLEICHUNG !

WAS IST DIE ψ - FUNKTION ?

BEVOR DIES BEANTWORTET WERDEN KANN UNTERSUCHEN WIR $\mathcal{L}$.

$\mathcal{L}$ BESITZT EINE WEITERE SYMMETRIE.

SEI $\eta \in \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{aligned} \psi &\to \psi e^{i\eta} \\ \psi^* &\to \psi^* e^{-i\eta} \end{aligned}\right\} \mathcal{L} \to \text{INVARIANT.}$$

PHASEN-SYMMETRIE !

DIESE SYMMETRIE IMPLIZIERT EINEN ERHALTUNGSSATZ.

$\longrightarrow$ LETZTE VORLESUNG.

$\mu : 0 \dots 3$
$a : 1 \dots 3$

$$\left(\Pi^{\mu}\delta\psi + \Pi^{\mu *}\psi^{*}\right)_{|\mu} = 0$$

$$= \vec{\nabla}\left(\Pi^{a}\delta\psi + \Pi^{*a}\delta\psi^{*}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\Pi\delta\psi + \Pi^{*}\delta\psi^{*}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} \delta\psi &= \psi + i\eta\psi - \psi \\ \delta\psi^{*} &= \psi^{*} - i\eta\psi^{*} - \psi^{*} \end{aligned}\right\} \eta \ll 1.$$

(LOKALE VARIATION).

$$\Pi^{a} = -\frac{\hbar^2}{2m}\psi^{*}_{|a}$$

$$\Pi = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(-\frac{im}{\hbar}\psi^{*}\right)$$

$$\Pi^{a}\delta\psi + \Pi^{*a}\delta\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\psi^{*}_{|a}(+i\eta)\psi + \psi_{|a}(-i\eta)\psi^{*}\right]$$

$$\Pi\delta\psi + \Pi^{*}\delta\psi^{*} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left[-\frac{im}{\hbar}\right]\left[\psi^{*}i\eta\psi + \psi^{*}i\eta\psi\right]$$

$$-\frac{\hbar^2 i\eta}{2m}\left\{-\frac{im}{\hbar}\partial_t\left(2\psi^{*}\psi\right) + \vec{\nabla}\left[(\vec{\nabla}\psi^{*})\psi - \psi^{*}(\vec{\nabla}\psi)\right]\right\} = 0$$

$$\curvearrowright \quad \partial_t\left(\psi^{*}\psi\right) + \frac{i\hbar}{2m}\vec{\nabla}\left[(\vec{\nabla}\psi^{*})\psi - \psi^{*}(\vec{\nabla}\psi)\right] = 0$$

STROMERHALTUNG!

$W = \psi^{*}\psi = |\psi|^2$ – WAHRSCHEINLICHKEITSSTROMDICHTE.

$$\vec{J} = \frac{\hbar}{2mi}\left[\psi^{*}\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^{*}\right] \rightarrow \quad \underline{\underline{\partial_t W + \vec{\nabla}\vec{J} = 0}}$$

WAHRSCHEINLICHKEITSERHALTUNG.

M. BORN: $|\psi(r,t)|^2$ IST DIE WAHRSCHEINLICHKEITSVERTEILUNG,

BSP: ATOM: VON ELEKTRONEN IN DER RAUM-ZEIT.

BEACHTE: DIE ZEITABLEITUNG MUSSTE LINEAR! AUFTRETEN.

$\Longrightarrow$ ALLG. PROBLEM IM FALE RELATIVISTISCHER GLEICHUNGEN

$\longrightarrow$ WELLENGLEICHUNGEN

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi - \Delta\psi = 0 \qquad \text{z.B.}$$

MAN SCHREIBT AUCH:

$$\Box\psi = 0 \quad , \qquad \Box \text{ - d'ALAMBET OPERATOR.}$$

$$\Box = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}, -\frac{\partial^2}{\partial x^2}, -\frac{\partial^2}{\partial y^2}, -\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right).$$

$\longrightarrow$ BEMERKUNG:

SPÄTER WIRD DIE PHASENSYMMETRIE AUF DIE EICH-PHASENSYMMETRIE ERWEITERT

$\Longrightarrow$ ANKOPPLUNG VON KRATFELDERN.

DAS SKALARE FELD:

KLEIN-GORDON THEORIE. RELATIVISTISCHE FELDER OHNE SPIN.

$\longrightarrow$ BISHER: NICHTREL. FELD $\to$ SCHRÖDINGER

$\longrightarrow$ KG-FELD: EINFACHSTES RELATIVISTISCHES FELD.

$$\mathcal{L}_{KG} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\phi^*_{|\mu}\phi^{|\mu} + \frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\phi^*\phi\right]$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^*$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^*} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\phi\right]$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^*_{|\mu}} = -\frac{\hbar^2}{2m}\phi^{|\mu}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^*} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^*}\right)_{|\mu} = \frac{\hbar^2}{2m}\left[\phi_{|\mu}{}^{|\mu} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\phi\right] = 0$$

$$\Box\phi - m^2\phi = 0 \qquad \hbar^2 = c^2 = 1.$$

Massive Wellen-Gleichung.

$$\Box\phi^* - m^2\phi^* = 0$$

(gilt auch).

ANWENDUNG: HIGGS-FELD

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}|\partial_\mu \phi|^2 + m^2 \phi\phi^* - \underbrace{\lambda(\phi\phi^*)^2}_{\text{SELBSTWECHSELWIRKUNG.}}$$

$$|\partial_\mu \phi|^2 = (\partial_\mu \phi^*)(\partial^\mu \phi)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} = m^2 \phi - 2\lambda(\phi\phi^*)\phi$$

$$\square \phi - m^2 \phi + 2\lambda |\phi|^2 \phi = 0.$$

SPÄTER: BILDUNG VON EICHBOSON MASSEN.

C) QUANTENMECHANIK:

- OBSERVABLE DER KLASSISCHEN MECHANIK WERDEN DURCH FUNKTIONEN f ÜBER DER RAUM-ZEIT $\mathbb{R}^3 \times T \to \mathbb{R}^4_M$ DARGESTELLT.
- ZUSTÄNDE AN WELCHEN DIES OBSERVABLEN GEMESSEN WERDEN, GIBT ES IM ENGEREN SINNE NICHT. ALLE OBSERVABLEN SIND IMMER, IN BELIEBIGER ZAHL STÖRUNGS FREI MESSBAR.

QUANTENMECHANIK:

MESSWERTE ENTSTEHEN AUS DER REDUKTION VON OBSERVABLEN AN ZUSTÄNDEN.

i) ZUSTÄNDE: WERDEN DURCH UNTERRÄUME EINES HILBERTRAUMES BESCHRIEBEN.

HILBERTRAUM: IST EIN (LIN.) VEKTORRAUM $\mathfrak{H}$ ÜBER $\mathbb{C}$, EVTL. ∞ - DIMENSIONAL, UNITÄR.
$|\psi\rangle$, $\langle\psi|$

ii) OBSERVABLE: WERDEN DURCH LINEARE OPERATOREN IN $\mathfrak{H}$ DARGESTELLT
$\longleftrightarrow$ MATRIZEN, DIE HERMITESCH SIND

$$A = A^\dagger \quad , \quad A^\dagger = (A^*)^T = (A^T)^*.$$

DIE OPERATOREN BILDEN AUCH EINEN VEKTORRAUM.

PROBLEM: KONTINUIERL. SPEKTREN $\rightarrow$ SPEKTRALSCHAREN (HIER NICHT BEHANDELT).

MESSWERT: SEI $\sum_k |\psi_k\rangle$ EIN ZUSTAND, $\mathring{A}$ EINE OBSERVABLE, DANN IST

$$m(A,\psi) = \sum_{k,l} \langle \psi_k | \mathring{A} | \psi_l \rangle$$

DER MESSWERT VON $\mathring{A}$ an $\sum_k |\psi_k\rangle$.

BEISPIEL: $\mathring{A}$: HAMILTON-OPERATOR DES H-ATOMS

$|\psi\rangle$: 1s ZUSTAND DES e–p SYSTEMS.

$m(A,\psi)$: 1s-ENERGIENIVEAU DES H ATOMS.

HILBERTRAUM: BILDUNG EINER BASIS $\rightarrow$ DARSTELLUNG ALLER ZUSTÄNDE DURCH DIE BASIS.

BASIS $\mathcal{L}(\mathfrak{h}) = \{ |\psi_1\rangle, \dots |\psi_k\rangle \dots \}_{k=1}^{\infty}$

SEI $|\psi\rangle \in \mathfrak{h} \Rightarrow \underline{\underline{|\psi\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle \psi_k | \psi \rangle |\psi_k\rangle}}$

GEMISCHTER ZUSTAND.

SKALARPRODUKT: $\Rightarrow$ NORM IM HILBERTRAUM.

WIE ERZEUGT MAN REINE ZUSTÄNDE?

$\Longrightarrow$ PROJEKTOREN AUF $\mathfrak{h}$.

$$P_k |\psi\rangle = a_k |\psi_k\rangle$$

P_k : $\quad P_k P_l = P_l P_k = \delta_{kl} P_k$

$$P_k^2 = P_k$$

BEISPIELE FÜR OPERATOREN:

ORTSOPERATOR: $\vec{x} = \vec{x}^{\dagger}$ $\nexists$ ZEITOPERATOR!

IMPULSOPERATOR: $\vec{p} = \vec{p}^{\dagger}$

HAMILTONOPERATOR: $H = H^{\dagger}$

MATRIZEN BILDEN i. ALLG. KEINEN KOMMUTATIVEN RING!

$\curvearrowright$ $\exists$ KOMMUTATOREN $\neq 0$

$$AB - BA = [A, B] \neq 0 .$$

KONKRETE FORMEN:

$$x_k = x_k$$

$$p_k = \frac{\hbar}{i} \partial_k \qquad \hbar = \frac{h}{2\pi} .$$

$$\frac{\hbar}{i}\left(x_k \partial_\ell - \partial_\ell x_k\right) \varphi(x) = \frac{\hbar}{i}\left(x_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_\ell} - \delta_{\ell k} \varphi - x_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_\ell}\right)$$

$$= \frac{\hbar}{i} \delta_{\ell k} \varphi(x)$$

$$\curvearrowright \quad [p_k, x_k] = -[x_k, p_\ell] = -\frac{\hbar}{i} \delta_{\ell k}$$

$$[p_\ell, p_k] = [x_\ell, x_k] = 0$$

ABER:

$$[p_\ell, x_\ell] = -\frac{\hbar}{i}$$

DIE HEISENBERGSCHE UNSCHÄRFERELATION:

SEI: $[F, G] \neq 0$

$\langle A \rangle$ BEZEICHNET DEN ERWARTUNGSWERT VON A

$\langle\langle A \rangle\rangle = \langle A \rangle$.

$a := A - \langle A \rangle \mathbb{1}$: STREUUNGSOPERATOR – ABWEICHUNG VOM ERWARTUNGSWERT.

$\mathrm{Str}[A] = \| a \phi \|^2$

<u>BILDE:</u>

$\mathrm{Str}[F] \cdot \mathrm{Str}[G] = \| f \phi \|^2 \| g \phi \|^2 \geq |\langle f\phi | g\phi \rangle|^2$

SCHWARZ.

NUN IST: $\langle f\phi | g\phi \rangle \langle g\phi | f\phi \rangle = \langle \phi | fg \phi \rangle \langle \phi | gf | \phi \rangle$

$$= \langle fg \rangle \langle gf \rangle.$$

$$= \left\langle \frac{fg+gf}{2} + i\,\frac{fg-gf}{2i} \right\rangle \left\langle \frac{fg+gf}{2} - i\,\frac{fg-gf}{2i} \right\rangle$$

3. BINOM. FORMEL

$$= \left(\left\langle \frac{fg+gf}{2} \right\rangle\right)^2 + \left(\frac{\langle fg-gf \rangle}{2i}\right)^2$$

NUN IST WEITER

$$\langle fg+gf \rangle = \langle (F-\langle F \rangle)(G-\langle G \rangle) + (G-\langle G \rangle)(F-\langle F \rangle) \rangle$$

$$= \langle FG + GF \rangle - 2\langle F \rangle \langle G \rangle.$$

$\Downarrow$

$$\mathrm{Str}[F]\,\mathrm{Str}[G] \geq \Big[\underbrace{\frac{\langle FG+GF\rangle}{2}-\langle F\rangle\langle G\rangle}_{\text{(WEGLASSEN).}}\Big]^2+\left(\frac{\langle FG-GF\rangle}{2i}\right)^2$$

$\uparrow$

$$\Delta F^2\,\Delta G^2 \geq \left|\frac{1}{2i}\langle[F,G]\rangle\right|^2$$

$\Downarrow$

$$\Delta F\,\Delta G \geq \left|\frac{1}{2i}\langle[F,G]\rangle\right|$$

HEISENBERSCHE UNSCHÄRFE REL.

$$[p,x]=-\frac{\hbar}{i}$$

$\Downarrow$

$$\boxed{\Delta p\,\Delta x \geq \frac{\hbar}{2}}$$

IMPULS & ORT SIND NICHT ZUGLEICH GENAU MESSBAR.

MAN SPRICHT BEI EINEM SATZ KOMMUTIERENDER OBSERVABLER VON KOMMENSURABLEN GRÖSSEN.

<u>BEISPIEL</u>: H-ATOM; ENERGIE (H), DREHIMPULS ($J=L+S$), Z-KOMPONENTE DES DREHIMPULSES J_z

$$[H,J]=[J^2,J_z]=[J_z,H]=0.\ !$$

QUANTENMECHANIK DES DREHIMPULSES UND SPIN

BETRACHTEN: DREHIMPULS $\vec{J}$

BEISPIEL: BAHNDREHIMPULS: $\vec{l} = \vec{x} \times \vec{p}$

ES GELTEN DIE VERTAUSCHUNGSRELATIONEN:

$$[J_x, J_y] = -\frac{\hbar}{i} J_z$$
$$[J_y, J_z] = -\frac{\hbar}{i} J_x$$
$$[J_z, J_z] = -\frac{\hbar}{i} J_y$$

zyklisch!

DREHIMPULS-QUADRAT: $\vec{J}^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$.

$$[J_x, \vec{J}^2] = [J_x, J_y^2] + [J_x, J_z^2]$$
$$= [J_x, J_y] J_y + J_y [J_x, J_y]$$
$$+ [J_x, J_z] J_z + J_z [J_x, J_z]$$
$$= -\frac{\hbar}{i} J_z J_y - \frac{\hbar}{i} J_y J_z$$
$$+ \frac{\hbar}{i} J_y J_z + \frac{\hbar}{i} J_z J_y \equiv 0.$$

DREHIMPULS-BETRAG & KOMPONENTEN VERTAUSCHEN.

$$[J_i, \vec{J}^2] = 0.$$

DEFINIERE:

$$J_\pm = J_x \pm i J_y$$

$$J_x = \frac{1}{2}(J_+ + J_-) \quad , \quad J_y = \frac{1}{2i}(J_+ - J_-)$$

$$[\vec{J}^2, J_\pm] = 0 .$$

$$[J_+, J_-] = [J_x + i J_y, J_x - i J_y] = i[J_y, J_x] - i[J_x, J_y]$$

$$\underline{\underline{[J_+, J_-] = 2\hbar J_z}}$$

$$[J_z, J_\pm] = \pm \hbar J_\pm$$

$\uparrow$

hebe & senke-
Operator.

$$\underline{\underline{[J_z, J_\pm^n] = \pm n \hbar J_z}}$$

<u>EIGENWERTE VON: $\vec{J}^2, J_z$:</u>

$$\vec{J}^2 |\psi\rangle = a\hbar^2 |\psi\rangle$$

$$J_z |\psi\rangle = M\hbar |\psi\rangle$$

$$[J_z, J_\pm] |\psi\rangle = \pm \hbar J_\pm |\psi\rangle$$

$$J_z J_\pm |\psi\rangle = J_\pm J_z |\psi\rangle \pm \hbar J_\pm |\psi\rangle = (M \pm 1)\hbar J_\pm |\psi\rangle$$

$$\vec{J}^2 J_\pm |\psi\rangle = J_\pm J^2 |\psi\rangle = a^2\hbar^2 J_\pm |\psi\rangle$$

NUN GILT: $\langle\psi|\vec{J}^2|\psi\rangle \geq \langle\psi|J_z^2|\psi\rangle \geq 0$

$$a \geq M^2 \geq 0$$

$$-\sqrt{a} \leq M \leq \sqrt{a} .$$

$|\psi_{max}\rangle$, $|\psi_{min}\rangle$ WELLENFKT. MIT GRÖSSTEM, KLEINST. EIGENWERT.

$$J_+ |\psi_{max}\rangle = 0$$

$$J_- |\psi_{min}\rangle = 0$$

$$J_- J_+ |\psi_{max}\rangle =$$

$$= [J_x^2 + J_y^2 + i[J_x, J_y]] |\psi_{max}\rangle$$

$$= [\vec{J}^2 - J_z^2 - \hbar J_z] |\psi_{max}\rangle$$

$$= (\hbar^2 Q^2 - M_{max}^2 \hbar^2 - M_{max} \hbar^2) |\psi_{max}\rangle = 0$$

$Q = M_{max}(M_{max}+1)$. ANALOG: $|\psi_{min}\rangle$

$$\longrightarrow Q = M_{min}(M_{min}-1)$$

$$J_z J_-^n |\psi_{max}\rangle = (M_{max} - n)\hbar \, J_-^n |\psi_{max}\rangle$$

Maximiere n.

$$\curvearrowright \quad \underline{M_{max} = M_{min} + n}$$

LÖSE: $M_{max}(M_{max}+1) = M_{min}(M_{min}-1)$

$$= (M_{max}-n)(M_{max}-n-1)$$

$$\curvearrowright \quad M_{max} = \frac{n}{2}$$

Def. $M_{max} := J = \frac{n}{2}$

DREHIMPULS-BETRAGS EIGENWERTE SIND GANZ ODER HALBZAHLIG.

$$J = 0, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, \ldots$$

$-J \leqslant M \leqslant J \quad \leftarrow$ DIE z-KOMPONENTE DES DREHIMPULSES NIMMT $(2J+1)$-WERTE AN.

$\longrightarrow$ QUANTISIERUNG DES DREHIMPULSES.

$\boxed{\text{SPIN}}$

WIR BESCHRÄNKEN UNS HIER AUF FERMIONEN.

$\vec{J}$	$\rightarrow \vec{S}$	OPERATOR
J	$\rightarrow s = \frac{1}{2}$	ERWARTUNGSWERT SPINBETRAG
M	$\rightarrow m = \pm\frac{1}{2}$	MAGN. SPINQUANTENZAHL

<u>ANZAHL</u> DER WERTE: $2s+1 \underset{}{\overset{\text{FÜR: } S_z}{=}} 2.$

$$\vec{S}^2 |\psi^\pm\rangle = s(s+1)\hbar^2 |\psi^\pm\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2 |\psi^\pm\rangle$$

$$S_z |\psi^\pm\rangle = \pm\frac{\hbar}{2} |\psi^\pm\rangle$$

DESWEITEREN GILT: $S_\pm = S_x \pm i S_y$

$$S_+ |\psi^+\rangle = S_- |\psi^-\rangle = 0$$

$$S_+ |\psi^-\rangle = \hbar |\psi^+\rangle , \quad S_- |\psi^+\rangle = \hbar |\psi^-\rangle$$

WIR KÖNNEN NUN EINEN 2-DIMENSIONALEN UNTERRAUM VON $\mathcal{H}$ BETRACHTEN, DER DURCH DAS DOUBLETT: $u = \begin{pmatrix} |\psi^+\rangle \\ |\psi^-\rangle \end{pmatrix}$ AUFGESPANNT WIRD.

$$(\langle\psi^+|, \langle\psi^-|)\, \vec{S}^2 \begin{pmatrix} |\psi^+\rangle \\ |\psi^-\rangle \end{pmatrix} = \frac{3}{4}\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \leftarrow \text{EINHEITS-MATRIX.}$$

$$: \langle\psi^\pm|\vec{S}^2|\psi^\pm\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2, \quad \langle\psi^\pm|\vec{S}^2|\psi^\mp\rangle = 0.$$

$$\langle u|S_z|u\rangle = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\langle u|S_+|u\rangle = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\langle u|S_-|u\rangle = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

NUN IST: $S_x = \frac{1}{2}(S_+ + S_-)$, $S_y = \frac{1}{2i}(S_+ - S_-)$

$$\curvearrowright \langle u|S_x|u\rangle = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \langle u|S_y|u\rangle = \frac{\hbar}{2i}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

<u>DEFINITION:</u>

MAN NENNT $\frac{2}{\hbar} S_{x,y,z}$ PAULI-MATRIZEN:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

DIE PAULI-MATRIZEN BILDEN EINE BASIS DER GRUPPE: **SU(2)**.

SPEZIELL GELTEN FOLGENDE RELATIONEN:

$$S_x^2 = S_y^2 = S_z^2 = \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D.H. DIE PAULI MATRIZEN SIND "WURZELN" DER EINHEITSMATRIX IN 2-DIMENSIONEN.

$$S_x S_y - S_y S_x = 2i\, S_z$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

$$\underline{[S_x, S_y] = 2i\, S_z}$$

$$S_x S_y S_z = i\, S_z^2 = i\, \mathbb{1}$$

$$\underline{S_x S_y S_z = i\,\mathbb{1} = i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$S_+^2 = S_-^2 = 0.$$

DIES BEZOG SICH AUF DEN SPIN VON FERMIONEN.

BSP: PHOTONEN, W & Z- BOSONEN, GLUONEN

<u>SPIN 1</u> := J

$M \in [-1, 0, 1]$ BIS ZU 3 POLARISATIONSVEKTOREN.

$\mapsto$ MASSELOSE TEILCHEN (PHOTONEN, GLUONEN).

EICHBEDINGUNG $A_\mu p_\mu = 0$ Z.B. $\to$ TRANSVERSALITÄT.

$\longrightarrow$ NUR 2 ZUSTÄNDE, KEINEN MIT $M=0$.

<u>ERWEITERUNG:</u> ANKOPPLUNG DES ELEKTRO-MAGN. FELDES (PHOTONEN).

$$\partial_\mu \longrightarrow \mathcal{D}_\mu = i\partial_\mu - eA_\mu$$

A_μ – PHOTON FELD, e – TEILCHENLADUNG.

$$\underbrace{(i\partial_\mu - eA_\mu)}_{\text{4-Impuls-Operator.}}(i\partial^\mu - eA^\mu)\,\psi = m^2\psi$$

$$\Longrightarrow \left[(i\partial_t - e\phi)^2 - \sum_{k=1}^{3}(-i\partial_k - eA_k)^2\right]\psi = m^2\psi$$

KLEIN-GORDON-GL. $\quad \phi \mathrel{\hat{=}} 4.$ KOMPONENTE VON A_μ.

$\longrightarrow$ WAS IST DER NICHTRELATIVISTISCHE GRENZFALL?

$$H = i\partial_t\,.$$

$$H - e\phi = \sqrt{m^2 + \sum_{k=1}^{3}(-i\partial_k - eA_k)^2}$$

$$m \gg |\vec{p}\,|$$

$$H - e\phi \approx m + \frac{1}{2m}\sum_{k=1}^{3}(-i\partial_k - eA_k)^2 + \ldots$$

$$H|\psi\rangle = \hat{E}|\psi\rangle \qquad \hat{E} = E + m$$

$$= \left(m - \frac{1}{2m}\Delta + e\phi\right)|\psi\rangle \quad , \qquad A_k \approx 0$$

$$\frac{1}{i}\partial_t|\psi\rangle = \left[\frac{\Delta}{2m} - V(\kappa,t)\right]|\psi\rangle \quad , \quad e\phi = V.$$

DER NICHT-RELATIVISTISCHE LIMES DER KLEIN-GORDON GLEICHUNG IST DIE SCHRÖDINGER-GLEICHUNG.

$\Longrightarrow$ KEINE BESCHREIBUNG DES SPINS IN <u>BEIDEN</u> GLEICHUNGEN.

$\longrightarrow$ MAGNETFELD VORHANDEN $\longleftrightarrow$ $\vec{B}$ & SPIN HABEN WECHSELWIRKUNG.

<u>PAULI-GLEICHUNG</u>

$\longrightarrow$ NICHT-RELATIVISTISCHE GLEICHUNG.

BEOBACHTUNG:

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

PAULI:

$$H^{\text{SCHRÖDINGER}} \longrightarrow \frac{1}{2m}\left(\sigma_k p^k\right)^2 + V \quad ; \quad V = e\phi$$

$$= \frac{1}{2m}\left[\sigma_k\left(-i\partial^k - eA^k\right)\right]^2 + e\phi$$

$$\pi_k = -i\partial_k - eA_k$$

ALGEBRA DER PAULI-MATRIZEN:

$$\sigma_k \sigma_l = \delta_{kl}\mathbb{1} + i\varepsilon_{klm}\sigma^m$$

$$\varepsilon_{klm} = \begin{cases} 1 & (k,l,m) \text{ gerade Perm. von } (1,2,3) \\ -1 & (k,l,m) \text{ un -''- \quad -''- \quad -''-} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$[\sigma_k \pi^k]^2 = \sum_k \sigma_k^2 \pi_k^2 + i\,\sigma^m \varepsilon_{klm} \pi^k \pi^l$$

$$\varepsilon_{klm} \pi^k \pi^l = (\vec{\pi} \times \vec{\pi})_m = [(\vec{p} - e\vec{A}) \times (\vec{p} - e\vec{A})]_m$$

$$= -e[\vec{A} \times \vec{p} + \vec{p} \times \vec{A}]_m$$

$$= (-e)(-i)[\vec{\nabla} \times \vec{A}]_m$$

$$= ie\,\vec{B}_m$$

WEIL : $\vec{a} \times \vec{a} = 0$, $[\vec{p}, \vec{A}] = -\vec{\nabla}.\vec{A}$

$\sigma_k^2 = \mathbb{1}$

$$H^{PAULI} = \frac{1}{2m} \vec{\pi}^2 - \frac{e\,\vec{\sigma}.\vec{B}}{2m}$$

$$\frac{1}{i} \partial_t |\psi\rangle = \left[\frac{1}{2m} \sum_k (-i\partial_k - eA_k)^2 - \frac{e\vec{\sigma}\vec{B}}{2m} + e\phi \right] |\psi\rangle$$

$\longrightarrow$ SCHRÖDINGER - GLEICHUNG ERGÄNZT DURCH $\vec{\sigma}.\vec{B}$ - TERM !

$\Longrightarrow$ <u>GRUND</u>: IMPULSE WERDEN SPIN-MATRIX - WERTIG !

(2*2) !

$\Longrightarrow$ JEDOCH: NICHT-RELATIVISTISCHER GRENZ-FALL.

DIRAC-THEORIE:

WIE GELANGT MAN ZU EINER RELATIVISTISCHEN VERALLGEMEINERUNG DER SCHRÖDINGER-GL., DIE DEN SPIN MIT BESCHREIBT?

$\Longrightarrow$ PAULI: 3-er IMPULS KANN MIT SPIN-MATRIZEN VERKNÜPFT WERDEN.

4-er-IMPULS? $(E, \vec{p})$?

$\longrightarrow$ NUR 3 PAULIMATRIZEN!

$\Longrightarrow$ EIN ZUSAMMENHANG ZUM KLEIN-GORDON OPERATOR SOLLTE BESTEHEN! (BISHER EINZIGE RELATIVISTISCHE GLEICHUNG.)

$$\Box |\psi\rangle = m^2 |\psi\rangle$$

$$-\partial_t^2 |\psi\rangle = (-\Delta + m^2) |\psi\rangle \qquad \Delta = \vec{\nabla}^2.$$

GESUCHT WIRD: GLEICHUNG LINEAR IN ∂_t

$\longrightarrow$ ERHALTUNG D. WAHRSCHEINLICHKEITSINTERPRETATION FÜR $|\psi\rangle$.

¿ WURZEL DES KLEIN-GORDON OPERATORS ?

$$\frac{\partial_t}{i^{-1}} |\psi\rangle = \sqrt{-\vec{\nabla}^2 + m^2}\ |\psi\rangle$$

$\longrightarrow$ S.O. FÜHRT FÜR $m \gg |\vec{\nabla}|$ AUF SCHRÖDINGER-GL.!

WAS IST DIE EXAKTE FORM ?

$\Longrightarrow$ GENERALISIERE : $\psi \rightarrow \psi_k$

SKALAR $\rightarrow$ VEKTOR.

$$i\partial_t |\psi_k\rangle = (-i\alpha_k \nabla^k + \beta m) |\psi_k\rangle$$

α_k UND β MATRIZEN!

ES GELTE:

$$-\partial_t^2 |\psi_k\rangle = (-\vec{\nabla}^2 + m^2)\, \mathbb{1}\, |\psi_k\rangle \quad \rightarrow \quad \text{KLEIN-GORDON GL.}$$

$$(-i\alpha_k \nabla^k + \beta m)(-i\alpha_k \nabla^k + \beta m) = (-\vec{\nabla}^2 + m^2)\, \mathbb{1}$$

$$-\alpha_k \alpha_l \nabla^k \nabla^l - i(\alpha_k \beta \nabla^k + \beta \alpha_l \nabla^l) + \beta^2 m$$

$$= (-\vec{\nabla}^2 + m^2)\, \mathbb{1}$$

$$\beta^2 = \mathbb{1}\ , \quad \alpha_k \beta + \beta \alpha_k = \{\alpha_k, \beta\} = 0$$

$$\alpha_k \alpha_l + \alpha_l \alpha_k = 2\delta_{kl}\, \mathbb{1}$$

$$i\partial_t |\psi\rangle = (-i\alpha_k \partial^k + \beta m)\, |\psi\rangle \qquad \cdot \beta$$

$$i\beta \partial_t |\psi\rangle = (-i(\beta\alpha_k)\partial^k + \mathbb{1} m)|\psi\rangle$$

$\rightsquigarrow$

$$\boxed{(i\gamma_\mu \partial^\mu - m)\,|\psi\rangle = 0}$$ DIRAC-GLEICHUNG

$\gamma_0 = \beta, \quad \gamma_k := \beta\alpha_k. \quad , \beta^2 = \mathbb{1}.$

$|\psi\rangle \mathrel{\hat{=}}$ BISPINOR.

ALLGEMEINE RELATIONEN ZWISCHEN DIRAC-MATRIZEN (4-DIMENSIONEN : $\mathbb{R}_M$):

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = \gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}$$

$$\gamma_\mu\gamma^\mu = 4\cdot\mathbb{1}_4$$

$$\gamma_5 \underset{Df}{:=} i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \frac{i}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma$$

$$\gamma_5^2 = \mathbb{1}, \qquad \{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0$$

MAN KANN MIT HILFE VON γ_5 PROJEKTOREN DEFINIEREN.

$$P_{L,R} = \frac{1}{2}(\mathbb{1} \mp \gamma_5).$$

$$P_L \cdot P_R = P_R \cdot P_L = 0.$$

$$P_L + P_R = \mathbb{1}$$

$$P_{L(R)}^2 = \frac{1}{4}(\mathbb{1} \pm 2\gamma_5 + \mathbb{1}) = P_{L(R)}$$

BEI ANWENDUNG VON P_L ODER P_R SPRICHT MAN AUCH VON EINER LINKS- ODER RECHTS-PROJEKTION:

$$\psi = (P_L + P_R)\,\psi = \psi_L + \psi_R$$

$$\psi_L = P_L \psi \qquad\qquad P_R \psi_L = P_L \psi_R = 0.$$

$$\psi_R = P_R \psi .$$

KONKRETE DARSTELLUNG VON DIRAC-MATRIZEN:

(EINE UNTER MEHREREN MÖGLICHKEITEN !)

DIRAC-DARSTELLUNG:

$$\gamma_0 = \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma_k = \beta\alpha^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix}$$

σ_k – PAULIMATRIZEN!

$\rightarrow$ MAN SIEHT, WIE DIE SPIN-MATRIZEN EINGEBAUT SIND.

GEHT IM NICHT-RELATIVISTISCHEN LIMES DIE DIRAC-GLEICHUNG IN DIE PAULI-GLEICHUNG ÜBER ?

$$\left(i\partial_\mu \gamma^\mu - m\right)\begin{pmatrix}\psi_0\\ \psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\end{pmatrix} = 0$$

$$i\partial_\mu \to i\partial_\mu - eA_\mu \underset{\mathrm{Df.}}{\equiv} i\mathcal{D}_\mu$$

$$\pi^0 = i\partial_t - e\phi$$

$$\pi^k = i\partial_k - eA_k \quad ; \quad k = 1, \dots, 3$$

BETRACHTE:

$$\begin{pmatrix}\psi_0\\ \psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\psi_a\\ \psi_b\end{pmatrix}, \quad \psi_a = \begin{pmatrix}\psi_0\\ \psi_1\end{pmatrix}, \quad \psi_b = \begin{pmatrix}\psi_2\\ \psi_3\end{pmatrix}$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix}\mathbb{1} & 0\\ 0 & -\mathbb{1}\end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix}0 & \sigma_k\\ -\sigma_k & 0\end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow$

$$\pi^0\psi_a + \sigma_k\pi^k\psi_b = m\psi_a$$

$$\pi^0\psi_b + \sigma_k\pi^k\psi_a = -m\psi_b$$

$$(m + E_{kin})\psi_a = \sigma_k\pi^k\psi_b + m\psi_a + V\psi_a \quad (1)$$

$$(m + E_{kin})\psi_b = \sigma_k\pi^k\psi_a - m\psi_b + V\psi_b \quad (2)$$

$\hookrightarrow$

$$\psi_b = \frac{\sigma_k\pi^k}{(2m + E_{kin} - V)}\psi_a \qquad e\phi \equiv V.$$

SETZE IN (1) EIN:

$$(m + E_{kin})\,\psi_a = \frac{(\sigma_k \pi^k)^2}{(2m + E_{kin} - V)}\,\psi_a + m\,\psi_a + V\psi_a$$

$$E_{kin}\,\psi_a \approx \left[\frac{1}{2m}(\sigma_k \pi^k)^2 + V\right]\psi_a$$

WENN $2m \gg |E_{kin} - V|$

PAULI-GLEICHUNG.

LÖSUNG DER DIRAC-GLEICHUNG FÜR FREIE TEILCHEN:

DIE DIRAC-GLEICHUNG IST EINE LINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNG. (PARTIELLE ABLEITUNGEN)

$\psi(x) = w(p)\, e^{-ip\cdot x}$ 4-er FORMULIERUNG.

$\rightsquigarrow \quad p_0 W(p) = (\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m)\, w(p)$

LÖSUNGEN EXISTIEREN FÜR:

$$\det_4 \left(\gamma_\nu p^\nu - m\, \mathbb{1}_4\right) = 0$$

$$p^2 - c^2 m^2 = 0$$

$$cp_0 = \pm\sqrt{c^2\vec{p}^{\,2} + m^2 c^4} = \pm E(p)$$

ES GIBT LÖSUNGEN NEGATIVER ENERGIE !

$p_0 > 0$ $\quad \psi_+(x) = u(p)\, e^{i(\vec{p}\vec{x} - p_0 t)}$

$(E>0)$

$$(\not{p} - mc)\, u(p) = 0$$

$$\bar{u}(p)\, (\not{p} - mc) = 0 \qquad \not{p} \underset{\mathrm{Df}}{:=} \gamma_\nu p^\nu$$

$p_0 < 0$ $\quad \psi_-(x) = v(p)\, e^{-i(\vec{p}\vec{x} - p_0 t)}$

$(E<0)$

$$(\not{p} + mc)\, v(p) = 0$$

$$\bar{v}(p)\, (\not{p} + mc) = 0$$

WAS PASSIERT BEI LADUNGSKONJUGATION ?

$$W(p) = \begin{pmatrix} u(p,s\uparrow) \\ u(p,s\downarrow) \\ v(p,s\uparrow) \\ v(p,s\downarrow) \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\b\end{matrix}}\right\} E>0 \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\b\end{matrix}}\right\} E<0 \end{matrix}$$

$$C\,W(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(p,s\uparrow) \\ u(p,s\downarrow) \\ v(p,s\uparrow) \\ v(p,s\downarrow) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(p,s\downarrow) \\ -v(p,s\uparrow) \\ u(p,s\downarrow) \\ -u(p,s\uparrow) \end{pmatrix}$$

EIN $E<0$ $s\downarrow$ ELEKTRON WIRD IN EIN
$E>0$ $s\uparrow$ POSITRON ÜBERFÜHRT ETC.

D.H. DIE NEGATIV-ENERGIE LÖSUNGEN ENT-SPRECHEN (IN DIESEM SINNE)

ANTIMATERIE !

<u>PROBLEM</u>: DIE DIRAC GLEICHUNG MUSS MIT DER HYPOTHESE VERSEHEN WERDEN, DAS ALLE $E<0$ ZUSTÄNDE BESETZT SIND, FALLS KEINE POSITRONEN DA SIND.

D.H. ERSCHAFFUNG EINES POSITRONS

$\longrightarrow$ AUFWENDUNG VON $E \geq m_e c^2$.
"HEBUNG EINES ZUSTANDES" AUS DEM SEE.

KONJUGATION DER LADUNG:

$$e \longrightarrow -e$$

WIR BETRACHTEN ZUNÄCHST EINE MATRIX C, DIE SICH SPÄTER ALS DIE MATRIX FÜR DIE LADUNGSKONJUGATION ERWEIST.

$$C \underset{\substack{\text{DIRAC}\\ \text{DARST.}}}{=} i\gamma_2\gamma_0 = i\begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

EINIGE EIGENSCHAFTEN VON C:

$$C^T = -C$$

$C^\dagger = (C^*)^T = -C$, HIER IST C ~~REELLWERTIG~~

$CC^\dagger = C^\dagger C = -C^2 = -(-\mathbb{1}) = \mathbb{1}_4.$, $C^* = C$

$$C\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\sigma_2 & 0 \\ 0 & -i\sigma_2 \end{pmatrix}$$

$$= \gamma_5 C$$

$$[\gamma_5, C] = 0.$$

TRANSFORMATION DER DIRAC-GLEICHUNG:

BEI $\mathbb{C}$:

$$\left[(i\partial_\mu - eA_\mu)\gamma^\mu - m\right]\psi = 0$$

DIRAC-eq.
ELEKTRON

1°: $\left(\quad \right)^*$

2°: $(C\gamma^0)\left(\quad \right)^*(C\gamma_0)^{-1}(C\gamma_0)\psi^* = 0$

1°: $\left[(-i\partial_\mu - eA_\mu)\gamma_\mu^* - m\right]\psi^* = 0$

DEF: $C\gamma_0\psi^* = \psi^c$ LADUNGSKONJUGIERTER BISPINOR.

$$(C\gamma_0)\gamma_\mu^*(C\gamma_0)^{-1} = -\gamma_\mu$$
$$(C\gamma_0)\, m\,(C\gamma_0)^{-1} = m$$

$$\rightarrow \left[(i\partial_\mu + eA_\mu)\gamma^\mu - m\right]\psi_c = 0$$

DIRAC-GL.
POSITRON.

EICHTHEORIEN DER KRAFTFELDER

1) $U(1)_{em}$: DAS MAXWELL FELD : QED

A_μ PHOTON FELD.

$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ FELDSTÄRKE TENSOR.

$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$

EICHINVARIANZ:

$A_\mu \rightarrow A_\mu + \chi_{|\mu}$, $\chi = \chi(x)$

$$\left.\begin{aligned} \partial_\nu A_\mu &\rightarrow \partial_\nu A_\mu + (\chi_{|\mu})_{|\nu} \\ \partial_\mu A_\nu &\rightarrow \partial_\mu A_\nu + (\chi_{|\nu\mu}) \end{aligned}\right\}$$ $F_{\mu\nu}$ IST EICHINVARIANT.

BEWEGUNGSGLEICHUNG DES MAXWELL-FELDES (IM VAKUUM):

$\delta\mathcal{L} = 0$

$-\frac{1}{4}\delta\left[F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right] = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu}\,\delta F^{\mu\nu} = 0$

$\delta F^{\mu\nu} = \delta(A^{\mu|\nu} - A^{\nu|\mu}) = (\delta A^\mu)^{|\nu} - (\delta A^\nu)^{|\mu} = -F_{\mu\nu}(\delta A^\nu)^{|\mu}$

$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$

$-\int d^4x\, F_{\mu\nu}(\delta A^\mu)^{|\nu} = +\int d^4x\, F_{\mu\nu|\nu}\,\delta A^\mu = 0$

$\underline{F_{\mu\nu|\nu} = 0}$

DIES SIND DIE MAXWELL-GLEICHUNGEN.

MAN SCHREIBT FÜR $F_{\mu\nu}$ AUCH

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} = -F_{\nu\mu}.$$

$\vec{E} = (E_i)_{i=1}^3$ ELEKTRISCHE FELDSTÄRKE

$\vec{B} = (B_i)_{i=1}^3$ MAGNETISCHE INDUKTION

$$\partial_t E_1 - \partial_y B_3 + \partial_z B_2 = 0$$
$$\partial_t E_2 - \partial_x B_3 - \partial_z B_1 = 0$$
$$\partial_t E_3 - \partial_x B_2 + \partial_y B_1 = 0$$

$$\underline{\partial_t \vec{E} = \operatorname{rot} \vec{B}}$$

$$\underline{\vec{E} = -\vec{\nabla} A_0 - \partial_t \vec{A}} = -F^{0i}$$

$$\underline{\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}}$$

$$\leadsto \underline{\operatorname{div} \vec{B} = 0}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$$

FREIE MAXWELLGLEICHUNGEN:

$\operatorname{div} \vec{E} = 0$ (LADUNGSFREIHEIT)

$\operatorname{div} \vec{B} = 0$

$\operatorname{rot} \vec{B} - \partial_t \vec{E} = 0$

$\operatorname{rot} \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0$

IN MEDIEN: $\operatorname{div} \vec{E} = \rho$ LADUNGSDICHTE

$+\operatorname{rot} \vec{B} - \partial_t \vec{E} = \vec{j}$ INDUKTIONSSTROM.

$\partial_t \rho + \operatorname{div} \vec{j} = 0$ STROMERHALTUNG.

UNTER DER LORENTZ EICHBEDINGUNG

$A_{\mu|\mu} = 0$ ERFÜLLT A_μ

$$\Box A_\mu = 0$$

WELLENGLEICHUNG DES PHOTONFELDES.

$m = 0$.

KOPPLUNG AN FERMIONISCHE MATERIE:

$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + ie A_\mu$ KOVARIANTE ABLEITUNG

$$\mathcal{L}_F \sim \bar{\psi} \mathcal{D}_\mu \psi$$

$$\mathcal{D}_\mu \psi = (\partial_\mu + ie A_\mu)\psi .$$

EICH - PHASENINVARIANZ:

$$\psi(x) \rightarrow e^{ie\Lambda_1(x)} \psi(x)$$

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \partial_\mu \Lambda_2(x)$$

$$\mathcal{D}_\mu \psi \rightarrow e^{ie\Lambda_1(x)} \left[\mathcal{D}_\mu \psi(x) + ie\, \partial_\mu (\Lambda_1(x) - \Lambda_2(x)) \right] \psi(x)$$

$\longrightarrow$ ERFÜLLT FÜR $\Lambda_1(x) \equiv \Lambda_2(x)$

EICH & PHASENINVARIANZ SIND GEKOPPELT!

FELDQUELLEN DES EM-FELDES SIND <u>NUR</u> DIE LADUNGEN.

$$\operatorname{div} \vec{E} = \rho$$
$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$\longrightarrow$ ASYMMETRIE DER MAWELL-GLEICHUNGEN.

MONOPOLE WURDEN BISHER NICHT BEOBACHTET.

$$\operatorname{div} E = e\rho_e \qquad \operatorname{rot} \vec{B} - \partial_t \vec{E} = e\vec{j}_e$$
$$\operatorname{div} B = g\rho_m \qquad \operatorname{rot} \vec{E} + \partial_t \vec{B} = -g\vec{j}_m$$

NUN KANN MAN $(\vec{E}, \vec{B})$ AUF $(\vec{E}', \vec{B}')$ ABBILDEN MIT

$$\begin{pmatrix} \vec{E}' \\ \vec{B}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{pmatrix}$$

WOBEI:

$$\begin{pmatrix} e' \\ g' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ g \end{pmatrix}$$

FORDERN WIR NUN $g' = 0$

$$\curvearrowright \quad \cos\theta = \sin\theta \cdot \left(\frac{e}{g}\right)$$
$$e' = \frac{g}{\sin\theta} = \sqrt{g^2 + e^2}$$

D.H. MAN KANN DEN FALL $\exists \rho_m$ NACH $\rho_m \equiv 0$ ROTIEREN. DIE LADUNG e REDEFIERT SICH MIT $\sqrt{g^2+e^2}$, FALLS $e/g = \text{CONST}$.

2) NICHT – ABELSCHE EICHFELDER: SU(N)

ABELSCHER FALL:

$$\psi'(x) = \mathcal{U}(\theta)\,\psi(x)$$

$$\mathcal{D}'_\mu \psi'(x) = \mathcal{U}(\theta)\,\mathcal{D}_\mu \psi(x)$$

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - ie A_\mu \quad ; \quad \mathcal{U}(\theta) = e^{-ie\,\theta(x)}$$

$$\Rightarrow \quad A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu \theta$$

VERALLGEMEINERUNG AUF SU(N):

$$U(\theta_k) = \exp\left[-ig\, L_k\, \theta^k\right]$$

, L_k GENERATOREN DER SU(N)

BSP: $\longrightarrow$ PAULIMATRIZEN FÜR SU(2) etc.

DIE GENERATOREN ERFÜLLEN:

$$[L_a, L_b] = i\, c_{abc}\, L^c$$

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - ig\, A^j_\mu\, L_j$$

MAN BILDET:

$$\mathcal{D}'_\mu \psi'(x) = \mathcal{U}(\theta_k)\, \mathcal{D}_\mu \psi(x)$$
$$= \partial_\mu \psi' - ig\, A'^{j}_{\mu} L_j \psi'$$
$$= \left(\partial_\mu \mathcal{U}(\theta_k)\right)\psi(x) + \mathcal{U}(\theta_k)\, \partial_\mu \phi(x) - ig\, A'^{j}_{\mu} L_j \cdot \mathcal{U}(\theta_h)\, \psi(x)$$
$$= \mathcal{U}(\theta_k)\left(\partial_\mu - ig\, A^j_\mu L_j\right)\psi(x).$$

MAN ERHÄLT SO:

$$\underline{\underline{A'^{j}_{\mu} L_j = \mathcal{U}(\theta_k)\left[A^j_\mu L_j - \frac{i}{g}\, \mathcal{U}^{-1}(\theta_k)\, \partial_\mu \mathcal{U}(\theta_k)\right]\mathcal{U}^{-1}(\theta_k)}}$$

BETRACHTE NUN DIE INFINITESIMALE TRANSFORMATION

$$\mathcal{U}(\theta_k) = 1 - ig\, L_k \theta^k + \underbrace{O(\theta_\ell \theta_m)}_{\ll 1}.$$

$$\leadsto \quad A'^{j}_{\mu} L_j = \left(1 - ig\, L_k \theta^k\right) A^j_\mu L_j \left(1 + ig\, L_n \theta^n\right) - \frac{i}{g}\left(-ig\, L_k \partial_\mu \theta^k\right)$$
$$= A^i_\mu L_i - L_k \partial_\mu \theta^k - ig\, [L_k, L_j]\, \theta^k A^j_\mu$$

ES IST: $g[L_k, L_j] = g\, c_{kjn} L_n$

$$\delta A^i_\mu L_i = (A'^{i}_{\mu} - A^i_\mu) L_i = -\partial_\mu \theta^i L_i + g\, c_{kjn} L_n \theta^k A^j_\mu$$

$$\leadsto \quad \underline{\underline{\delta A^i_\mu = -\partial_\mu \theta^i + g\, c^i{}_{jk}\, \theta^j A^k_\mu}}$$

ABELSCHER FALL $\quad \delta A_\mu = -\partial_\mu \theta.$

IM NICHTABELSCHEN FALL IST DIE VARIATION DES EICHFELDES EINE LINEARE FUNKTION DES FELDES.

WELCHER <u>KOVARIANTE</u> FELDSTÄRKETENSOR GEHÖRT ZU A^i_μ?

ABELSCHER FALL: $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

WIR BILDEN ZUNÄCHST DIESEN ANTEIL:

$$\hat{F}^i_{\mu\nu} = \partial_\mu A^i_\nu - \partial_\nu A^i_\mu$$

$$\delta \hat{F}^i_{\mu\nu} = \partial_\mu \delta A^i_\nu - \partial_\nu \delta A^i_\mu$$

$$= g c^i{}_{jk} \left[\partial_\mu \theta^j A^k_\nu + \theta^j \partial_\mu A^k_\nu - \partial_\nu \theta^j A^k_\mu - \theta^j \partial_\nu A^k_\mu \right]$$

$$= g c^i{}_{jk} \hat{F}^k_{\mu\nu} + \underbrace{g c^i{}_{jk} \left[(\partial_\mu \theta^j) A^k_\nu - (\partial_\nu \theta^j) A^k_\mu \right]}_{(*)\ \neq 0}$$

$\delta \hat{F}^i_{\mu\nu} \neq 0 \longrightarrow$ NICHT EICHINVARIANT.

BETRACHTE: $T^i_{\mu\nu} = g c^i{}_{jk} A^j_\mu A^k_\nu \longleftarrow$ NICHTLIN. TERM

MAN ZEIGT (KETTENREGEL), DASS

$$\delta T^i_{\mu\nu} = - g c^i{}_{jk} \hat{F}^k_{\mu\nu} \left[(\partial_\mu \theta^j) A^k_\nu - (\partial_\nu \theta^j) A^k_\mu \right] \longrightarrow \text{HEBT SICH MIT (*) AUF.}$$

$$+ g^2 c^i{}_{jk} \left[c^j{}_{lm} \theta^l A^m_\mu A^k_\nu + c^k{}_{lm} A^j_\mu \theta^l A^m_\nu \right]$$

$$\equiv -g^2 \left[c^i{}_{jk} c^k{}_{ml} + c^i{}_{mk} c^k{}_{jl} \right] \theta^l A^m_\mu A^j_\nu$$

$$\equiv g c^i{}_{jk} T^k_{\mu\nu}$$

MAN BILDET NUN:

$$F^i_{\mu\nu} = \hat{F}^i_{\mu\nu} + T^i_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A^i_\nu - \partial_\nu A^i_\mu + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{YANG-MILLS} \\ \text{TERM.}}}{g\, c^i{}_{jk} A^j_\mu A^k_\nu}$$

$$\delta F^i_{\mu\nu} \equiv g\, c^i{}_{jk} F^k_{\mu\nu}$$

DER FELDSTÄRKE TENSOR IM NICHT-ABELSCHEN FALL IST:

$$\mathcal{L}^{YM} = -\frac{1}{4} F^i_{\mu\nu} F_i^{\mu\nu}$$

$$\delta \mathcal{L}^{YM} = -\frac{1}{4}\left[\delta F^i_{\mu\nu} F_i^{\mu\nu} + F_i^{\mu\nu} \delta F^i_{\mu\nu}\right]$$

$$= -\frac{g}{4}\left[c^i{}_{jk} \theta^j F^k_{\mu\nu} F_i^{\mu\nu} + F_i^{\mu\nu} c^i{}_{jk} \theta^j F^k_{\mu\nu}\right]$$

$$= -\frac{g}{4}\left[c^i{}_{jk} \theta^j F^k_{\mu\nu} F_i^{\mu\nu} + F_i^{\mu\nu} F^k_{\mu\nu} c_{kj}{}^i \theta^j\right] \equiv 0$$

DA: $c_{ijk} = -c_{ikj} = c_{kij} = -c_{kji}$.

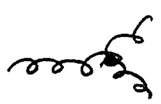
NICHT-ABELSCHE EICHINVARIANZ IMPLIZIERT NICHT-LINEARE WECHSELWIRKUNG!

$$\underline{\underline{F^i_{\mu\nu} = \partial_\mu A^i_\nu - \partial_\nu A^i_\mu + g\, c^i{}_{jk} A^j_\mu A^k_\nu}}$$

W, Z – BOSONEN $\quad SU(2)_L$

GLUONEN $\quad SU(3)_C$

HABEN NICHT-LINEARE WECHS.W. VERTICES

 & 

DIE SU(N) - EICHINVARIANZ ERLAUBT KEINE MASSENTERME $\rightarrow$ EXAKTE SYMMETRIE.

$$\nexists \quad \mathcal{L}_{mass} = \frac{1}{2} m^2 A_\nu A^\nu .$$

$\longrightarrow$ $SU(3)_c$ OK $\rightarrow$ masselose GLUONEN

$\longrightarrow$ $SU(2)_L$ - ELECTROSCHWACH

$\longrightarrow$ SPONTANE SYMMETRIE-BRECHUNG

$M[W] \sim 80$ GeV

$M[Z] \sim 90$ GeV

$$\sin^2\theta_W = 1 - \frac{M_W^2}{M_Z^2} \sim 0.2$$

SPONTANE SYMMETRIEBRECHUNG:

EICHBOSON : $m = 0 \xrightarrow[SSB]{} m \neq 0$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + |\mathcal{D}_\mu \phi|^2 - \mu^2 |\phi|^2 - \lambda |\phi|^4$$

BEISPIEL : PHOTON $\rightarrow$ MASSIVES PHOTON

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 \pm i \phi_2) \quad , \quad \mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + ie A_\mu$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

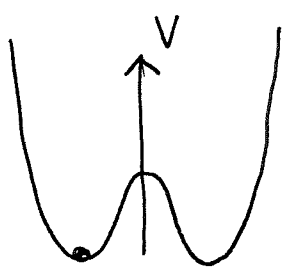
$\phi \rightarrow \phi' = e^{i\theta} \phi$ $\quad U(1)$ GLOBAL

$\phi \rightarrow \phi' = e^{i\Lambda(x)} \phi$ $\quad U(1)$ LOCAL

$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \Lambda(x)$.

WENN DAS SKALARFELD ϕ EINEN NICHT-TRIVIALEN $\neq 0$ VAKUUM-EWARTUNGSWERT ANNEHMEN KANN

$$V(\phi) = -\frac{1}{2} |\mu^2| |\phi|^2 + \frac{1}{4} |\lambda| |\phi|^4$$



DANN KANN MAM UM

$\langle \phi \rangle_0 = v \frac{1}{\sqrt{2}}$ ENTWICKELN.

SSB $\rightarrow$ SPONTANE BRECHUNG DER SYMMETRIE

$\langle \phi \rangle_0 = v$.

$$\phi = e^{i\xi/v}\,(v + \eta(x))\,\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\approx \left[v + \eta(x) + i\,\xi(x)\right]\frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\left[\partial_\mu\eta\,\partial^\mu\eta + 2\mu^2\eta^2\right]$$
$$+\frac{1}{2}\left[\partial^\mu\xi\,\partial_\mu\xi\right] + e v A_\mu(\partial^\mu\xi)$$
$$+ \frac{e^2v^2}{2}A_\mu A^\mu\,.$$

A_μ IST IMMER NOCH DAS MASSELOSE PHOTON.

$\mathcal{L}_H = \frac{1}{2}\left[\partial_\mu\eta\,\partial^\mu\eta\right] + \mu^2\eta^2$ IST EIN MASSIVES SKALARFELD, DAS SOG. HIGGS FELD.

STÖREND IST DAS ξ-FELD.
NUN KANN MAN SCHREIBEN:

$A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{ev}\partial_\mu\xi$ (REDEFINITION)

$\to$ LÄSST $F_{\mu\nu}$ INVARIANT!

$$A'_\mu A'^\mu = A_\mu A^\mu + \frac{1}{(ev)^2}\partial_\mu\xi\,\partial^\mu\xi + \frac{1}{ev}\left[A_\mu\partial^\mu\xi + A^\mu\partial_\mu\xi\right]$$

$$\frac{e^2v^2}{2}A'_\mu A'^\mu = \frac{1}{2}(\partial^\mu\xi\,\partial_\mu\xi) + e v A_\mu(\partial^\mu\xi) + \frac{e^2v^2}{2}A_\mu A^\mu$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_H - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{e^2 v^2}{2} A'_\mu A'^\mu$$

$$m_\gamma^{massiv} = \sqrt{e^2 v^2} = \underline{\underline{e v}}.$$

$F_{\mu\nu} \to F_{\mu\nu}$

DURCH SPONTANE SYMMETRIEBRECHUNG WERDEN MASSELOSE EICHBOSONEN MASSIV.

$\longrightarrow$ SEHR ÄHNLICH: W & Z $SU(2)_L$.

ES WIRD EINES DER SKALARFELDER IN DIE LONGITUDINALE MODE DES EICHFELDES ABORBIERT. DAS ANDERE SKALARFELD VERBLEIBT & ERHÄLT EINE MASSE.